ВОПРОСЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПОЛОВ

При необходимости устройства полов под особо тяжелые нагрузки от технологического оборудования, а также в случаях усиления существующих полов одним из наиболее распространенных решений являются многослойные плиты полов с различными вариантами армирования, обладающие большой долговечностью и допускающие широкое использование местных строительных материалов для сооружения нижних слоев многослойных промышленных полов. Выполненные исследования показывают, что необходимая несущая способность многослойных плит может быть достигнута при оптимальном соотношении толщин слоев и их прочностных параметров.



Горб Александр Михайлович
ЗАО «СК Конкрит Инжиниринг».
Директор.

Наиболее полное использование прочности материалов достигается при определенном соотношении расчетных параметров слоев: их толщин, модулей упругости и других характеристик. При отклонении этих параметров от оптимального значения большая часть нагрузки будет восприниматься одним из слоев, а другие слои будут недогружены. Это приведет к снижению долговечности конструкции и, в ряде случаев, к неоправданным экономическим затратам.

Расчет многослойных конструкций полов с теоретической точки зрения представляет более сложную задачу, чем однослойных. Расчетные значения изгибающих моментов с достаточной надежностью можно определить путем решения контактной задачи слоистых систем. В связи со сложностью работы многослойных конструкций под нагрузкой внутренние усилия (изгибающие моменты) и деформации (прогибы) плит определяются по расчетной схеме многослойной плиты на упругом основании при центральном (симметричном) расположении действующей сосредоточенной нагрузки. Несимметричное расположение нагрузки и влияние различных способов соединения плит между собой в швах учитывают путем введения поправочных коэффициентов к значению напряжений и изгибающих моментов для центрального расположения нагрузки. Расчет многослойных систем в зависимости от способа соединения различных слоев необходимо вести применительно к одному из двух следующих случаев: с «нескрепленными» слоями и со «скрепленными» слоями, то есть изготавливаемых способом «наращивания» и способом «сращивания».

Первый случай расчета находит применение при укладке каждого слоя по разделительной прослойке, допускающей сдвиг вышележащего слоя по нижнему слою.

Второй случай предусматривает сращивание верхнего слоя с нижним, исключающее возможность сдвигов одного слоя относительно другого. Когда верхний слой бетона надежно связан с бетоном нижних слоев, несущая способность многослойной системы практически не отличается от соответствующей монолитной. Расчетный момент может определяться по формулам для расчета однослойных плит исходя из приведенных характеристик многослойной конструкции. Поскольку в силу ряда технологических условий в большинстве случаев при устройстве полов получил наибольшее распространение первый способ, ниже рассматривается решение, когда слои не скреплены друг с другом. Отсутствие сцепления слоев друг с другом соответствует наиболее опасному случаю, что также идет в запас прочности и обеспечивает долговечность конструкции пола в целом.

Рассмотрим многослойную бесконечно протяженную в плане плиту, состоящую из произвольного числа слоев и лежащую на упругом полупространстве или на основании Винклера (рис. 1). При расчете многослойных плит должно удовлетворяться условие прочности для каждого слоя.

Для определения расчетного изгибающего момента задача рассматривается в цилиндрической системе координат r, θ , z. Каждый слой плиты характеризуется модулем упругости E, коэффициентом Пуассона μ_i и толщиной H_i.

Примем, что на верхнюю поверхность плиты действует равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью q = const по площади круга радиусом R. На нижнюю поверхность плиты действует реактивное давление

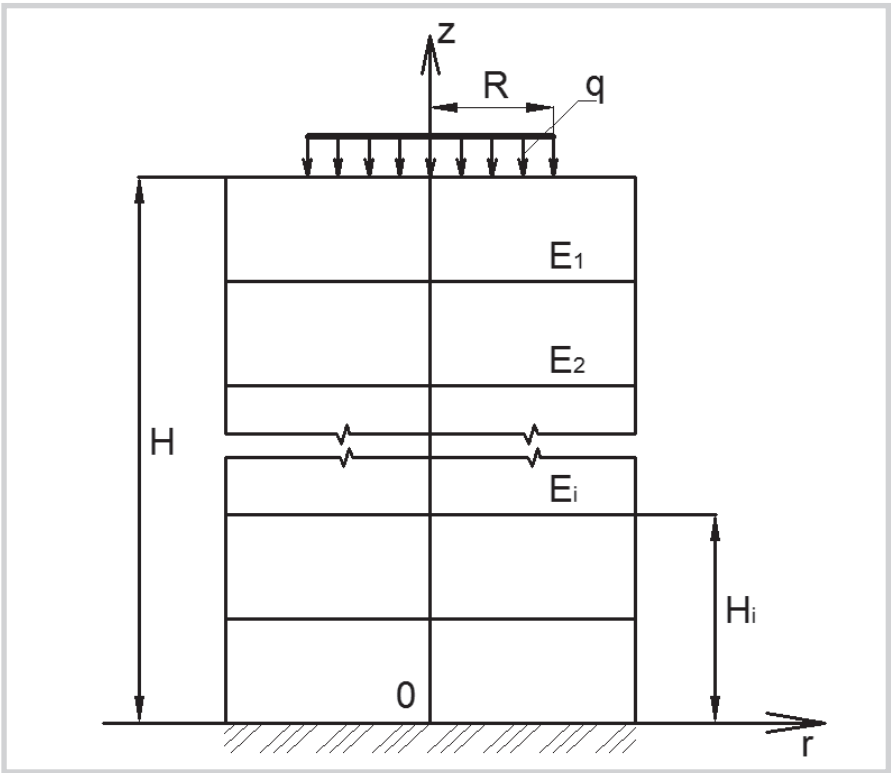


Рис. 1. Схема многослойной плиты на упругом основании

со стороны упругого полупространства или винклеровского основания. Между слоями силы трения отсутствуют. Граничные условия для плиты, лежащей на упругом полупространстве, записываются в виде:

$z = H;\ \sigma_{zi} = -q;\ -R \le r \le R;$

при:

$$\tau_{rz1} = 0;\ -\infty < r < \infty;$$

$$z = H_i;\ \sigma_{zi} = \sigma_{zi+1};$$

при:

$$\tau_{rz1} = 0;\ \tau_{rzi+1} = 0;\ w_i = w_{i+1}\ (i = 1,2\ldots, N) \quad (1)$$

Граничные условия для плиты, лежащей на винклеровском основании, записываются в виде:

$$z = H;\ \sigma_{zi} = -q;\ -R \le r \le R;$$

при

$$\sigma_{rz1} = 0;\ -\infty < r < \infty;$$

$$z = H_i;\ \sigma_{zi} = \sigma_{zi+1};\ -\infty < r < \infty;$$

при

$$\tau_{rz1} = 0;\ \tau_{rzi+1} = 0;\ w_i = w_{i+1}\ (i = 1,2\ldots, N)$$

$$z = 0\quad \sigma_{zN} = cw_N$$

$$\tau_{rzn} = 0 \quad (2)$$

где: c – коэффициент постели, H_i – координата границы раздела i и i + 1 слоя. Сформулированные задачи (1), (2) являются осесимметричными. Применяя принцип суперпозиции, эти задачи можно использовать для определения напряженно-деформированного состояния многослойной системы при действии нескольких сосредоточенных нагрузок.

Деформации и перемещения многослойной плиты связаны известными зависимостями:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r};\quad \xi_\theta = \frac{u}{r};$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};\quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (3)$$

Напряжения и перемещения для i–го слоя плиты должны удовлетворять следующей системе из двух дифференциальных уравнений равновесия в напряжениях:

$$\frac{\partial \sigma_{ri}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rzi}}{\partial z} + \frac{\sigma_{ri} - \sigma_{\theta i}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{rzi}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial z} + \frac{\tau_{rzi}}{r} = 0 \quad (4)$$

и в перемещениях:

$$\Delta u_i - \frac{u_i}{r^2} + \frac{1}{1-2\mu_i}\frac{\partial l_i}{\partial r} = 0$$

$$\Delta w_i + \frac{1}{1-2\mu_i}\frac{\partial l_i}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

где $l_i = \frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{u_i}{r} + \frac{\partial w_i}{\partial z}$ – объемное расширение в i–м слое.

Задачу теории упругости для многослойной плиты будем решать с помощью функций напряжения Лява φ_i. Можно легко убедиться, что система уравнений (5) удовлетворяется, если напряжения и перемещения искать в виде:

$$\sigma_{ri} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_i \Delta\varphi_i - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2}\right)$$

$$\sigma_{\theta i} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_i \Delta\varphi_i - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2}\right)$$

$$\sigma_{zi} = \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\mu_i)\Delta\varphi_i - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2}\right]$$

$$\tau_{rzi} = \frac{\partial}{\partial z}\left[(1-\mu_i)\Delta\varphi_i - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2}\right]$$

$$u_i = -\frac{1+\mu_i}{E_i}\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r \partial z}$$

$$w_0 = \frac{1+\mu_i}{E_i}\left[2(1-\mu_i)\Delta q_i - \frac{\partial^2 q_i}{\partial z^2}\right] \quad (6)$$

где функция напряжений $\varphi_i = \varphi_i(r,z)$ удовлетворяет бигармоническому уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2}\right) = \nabla^2\nabla^2\varphi_i = 0 \quad (7)$$

Оператор Лапласа ∇ представляет собой следующую величину:

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8)$$

Задача теории упругости для многослойного полупространства, в котором вместо винклеровского основания берут упругое однородное основание, рассмотрена в работе В. С. Никишина и Г. С. Шапиро.

Здесь и ниже используются результаты этой работы для построения решения рассматриваемой задачи о многослойной плите с нескрепленными слоями, лежащей на упругом винклеровском основании под действием сосредоточенной нагрузки распределенной по кругу ограниченного (малого) радиуса.

С помощью интегрального преобразования Хенкеля функция интенсивности нормальной нагрузки представляется в виде:

$$p(r) = \int_0^\infty \alpha p(\alpha) I_0(\alpha r) d\alpha \quad (9)$$

где p(α) – трансформатор Хенкеля:

$$p(\alpha) = \int_0^\infty r p(r) I_0(\alpha r) d\alpha \quad (10)$$

$I_0(\alpha r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Функция напряжения для i–го слоя плиты берется в следующем общем виде:

$$\varphi_i = \int_0^\infty \{[A_i(\alpha) + zB_i(\alpha)]e^{\alpha z} + [c_i(\alpha) + zD_i(\alpha)]e^{\alpha r}\} I_0(\alpha r) d\alpha \quad (11)$$

Подставим функцию (11) в формулы (6) и проведем их дифференцирование, в результате получим следующие выражения для напряжений и перемещений:

$$\sigma_{ri} = \int_0^\infty \alpha^2 \left[\Delta r_i(\alpha, z) I_0(\alpha, r) - \Delta u_i(\alpha, z)\frac{I_i(\alpha r)}{\alpha r}\right] d\alpha$$

$$\sigma_{\theta i} = \int_0^\infty \alpha^2 \left[\Delta \theta_i(\alpha, z) I_0(\alpha, r) - \Delta u_i(\alpha, z)\frac{I_i(\alpha r)}{dr}\right] d\alpha$$

$$\sigma_{zi} = \int_0^\infty \alpha^2 \Delta z_i(\alpha, z) I_0(\alpha, r) d\alpha$$

$$\tau_{rzi} = \int_0^\infty \alpha^2 \Delta \tau_i(\alpha, z) I_0(\alpha, r) d\alpha$$

$$\frac{E_i}{1+\mu_i} u_i = \int_0^\infty \alpha \Delta u_i(\alpha, z) I_i(\alpha, r) d\alpha$$

$$\frac{E_i}{1+\mu_i} w_i = \int_0^\infty \alpha \Delta w_i(\alpha, z) I_0(\alpha, r) d\alpha \quad (12)$$

Здесь функции: Δ_{ri}, Δ_i, Δ_{zi}, Δ_i, Δ_{ui}, Δ_{wi}, при i = 1,2… N определяются по формулам В. С. Никишина и Г. С. Шапиро. Для удобства решения задачи переходим от переменных r, z к безразмерным переменным ρ= r /R, t = z /H .

Кроме этого, введем новые переменные интегрирования β = rα и параметры:

$$\gamma_i = H_i/H;\ \lambda = H/R;\ \delta_i = E_i/E_{i+1}$$

$$x_i = \delta_i(1+\mu_{i+1})(1+\mu_i)$$

Переходим также от переменных A_i, B_i, C_i, D_i к новым переменным $\overline{A}$, $\overline{B}_i$, $\overline{C}_i$, $\overline{D}_i$ и получаем:

$$\overline{A}_i(\beta) = \frac{\beta^2}{R^4} A_i\left(\frac{\beta}{R}\right) e^{\beta\lambda\gamma_{i-1}}$$

$$\overline{B}_i(\beta) = \frac{\beta^2}{R^3} B_i\left(\frac{\beta}{R}\right) e^{\beta\lambda\gamma_{i-1}}$$

$$\overline{C}_i(\beta) = \frac{\beta^2}{R^4} C_i\left(\frac{\beta}{R}\right) e^{-\beta\lambda\gamma_1}$$

$$\overline{D}_i(\beta) = \frac{\beta^2}{R^3} D_i\left(\frac{\beta}{R}\right) e^{-\beta\lambda\gamma_1}$$

$$(i = 1,2,3...\ N)$$

(13)

Напряжения и перемещения в безразмерных переменных:

$$\sigma_{ri} = \int_0^\infty \beta\left[\overline{\Delta}r_i(\beta,t) I_0(\rho\beta) - \overline{\Delta}u_i(\beta,t)\frac{I_1(\rho\beta)}{\rho\beta}\right]d\beta$$

$$\sigma_{\theta i} = \int_0^\infty \beta\left[\overline{\Delta}\theta_i(\beta,t) I_0(\rho\beta) - \overline{\Delta}u_i(\beta,t)\frac{I_1(\rho\beta)}{\rho\beta}\right]d\beta$$

$$\sigma_{zi} = \int_0^\infty \beta\overline{\Delta}_{z_i}(\beta,t) I_0(\rho\beta)d\beta$$

$$\tau_{rzi} = \int_0^\infty \beta\overline{\Delta}_{\tau_i}(\beta,t) I_0(\rho\beta)d\beta$$

$$u_i = \frac{\Delta+\mu_i}{E_i} R\int_0^\infty \overline{\Delta}u_i(\beta,t) I_1(\rho\beta)d\beta$$

$$w_i = \frac{1+\mu_i}{E_i} R\int_0^\infty \overline{\Delta}w_i(\beta,t) I_0(\rho\beta)d\beta$$

(14)

В результате преобразования формул (6) – (14) получаем следующие замкнутые системы функциональных уравнений относительно функций $B_i(\beta)$, $D_i(\beta)$ (i = 1,2...N), $\overline{B}_{N+1}(\beta)$ и $B_i(\beta)$, $D_i(\beta)$ (i = 1, 2... N), которые записываются в следующей матричной форме:

$$\begin{bmatrix} N_1^{(1,2)} & & & \\ M_1^{(2,2)} & R_2^{(2,2)} & & \\ M_2^{(2,2)} & R_3^{(2,2)} & 0 & \\ & \vdots & & \\ 0 & M_{N-1}^{(2,2)} & R_N^{(2,2)} & \\ & & M_N^{(2,2)} & p_{N+1}^{(2,2)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_1(\beta) \\ D_1(\beta) \\ \vdots \\ B_N(\beta) \\ D_N(\beta) \\ B_{N+1}(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(\beta) \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

(15)

$$\begin{bmatrix} N_1^{(1,2)} & & & & \\ M_1^{(2,2)} & R_2^{(2,2)} & & & \\ M_2^{(2,2)} & R_3^{(2,2)} & 0 & & \\ \ddots & & & & \\ & M_{N-1}^{(2,2)} & R_N^{(2,2)} & & \\ & & G_N^{(1,2)} & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_1(\beta) \\ D_1(\beta) \\ \vdots \\ B_N(\beta) \\ D_N(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(\beta) \\ \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(16)

Матрицы N_1, M_i, R_i, G_N имеют следующий вид:

$$N_1^{(1,2)} = \left[-2\beta\lambda(1-\gamma_1) + \varphi_1(\beta)\varphi_1(\beta)e^{-\beta\lambda(1-\lambda_1)}\right]$$

где:

$$M_i^{(2,2)} = \begin{bmatrix} \varphi_i(\beta)e^{-\beta\lambda(\gamma_{i-1}-\lambda_i)} - 2\beta\lambda(\gamma_{i-1}-\gamma_i) + \varphi_i(\beta) \\ (1-\mu_i)e^{-\beta\lambda(\gamma_{i-1}-\gamma_i)} - (1-\mu_i) \end{bmatrix}$$

$$R_i^{(2,2)} = \begin{bmatrix} 2\beta\lambda(\gamma_{i-1}-\gamma_i) - \varphi_i(\beta) - \varphi_i(\beta)e^{-\beta_i(\gamma_{i-1}-\gamma_i)} \\ -\chi_{i-1}(1-\mu_i) \quad \chi_{i-1}(1-\mu_i)e^{-\beta\lambda(\gamma_{i-1}-\gamma_i)} \end{bmatrix}$$

$$P_{N+1}^{(2,1)} = \left[-\chi_N^{-1}(1-\mu_{N+1})\right]$$

$$G_N^{(1,2)} = \left[(\beta\varphi_N - q(1-\mu_N))^{-\beta\lambda\gamma_{N-1}} \times \beta(-2\beta\lambda\gamma_{N-1} + \varphi_N) + q(1-\mu_N)\right]$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i &= 1 + 2\varphi_i(\beta); \\ q &= 2\frac{1+\mu_N}{E_N}cR; \\ \chi_i &= \frac{(1+\mu_{i+1})E_i}{(1+\mu_i)E_{i+1}}. \end{aligned}\right\}$$

(17)

В случае равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q = const по кругу радиусом R трансформант Хенкеля имеет вид:

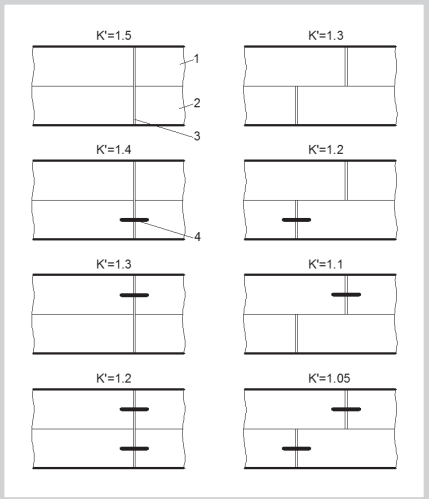


Рис. 2. Варианты двухслойных конструкций плит

$$\overline{p}(\beta) = -q\frac{I(\beta)}{\beta}$$

(18)

Напряжения в многослойных плитах при несимметричном расположении нагрузки и влияние различных способов соединения плит между собой учитываются в практических задачах путем умножения значений напряжений или моментов при центральном загружении плиты на переходной коэффициент k':

$$\sigma_{ki} = k'\sigma^{\mu}_{ki}$$

(19)

где σ_{ki} – напряжения в плите при несимметричном расположении нагрузки;

k' – переходной коэффициент, определяемый по рис. 2 в зависимости от наличия и вида стыковых соединений; при устройстве в плитах со сквозными швами краевого армирования коэффициент k' принимают как для варианта со стыковыми соединениями;

σ^{μ}_{ki} – напряжения в плите при симметричном (центральном) приложении нагрузки.

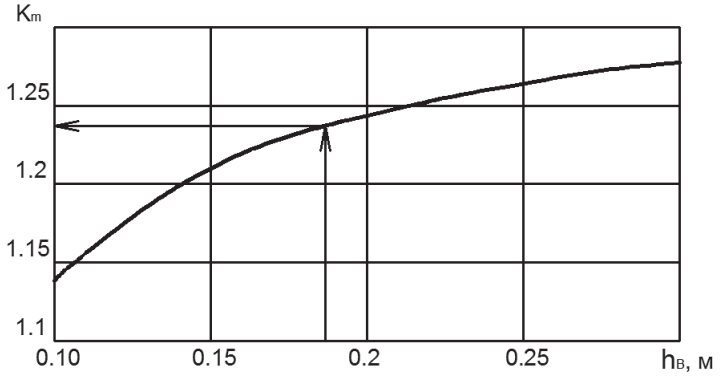
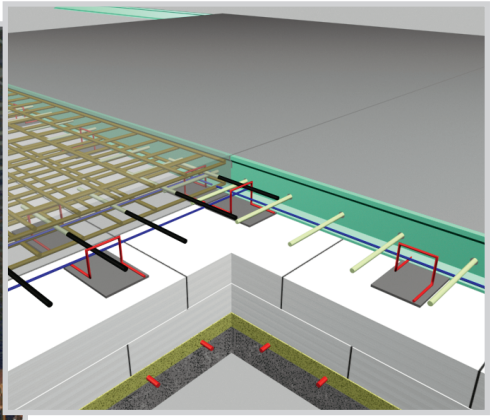


Рис. 3. График для определения поправочного коэффициента km





При расчете двухслойных плит должно удовлетворяться условие прочности для плит верхнего и нижнего слоев.

Предельные изгибающие моменты сечений определяются по соответствующим формулам в зависимости от типа конструкции плиты, при этом предельный изгибающий момент в плитах нижнего слоя, вычисленный по этим формулам, следует умножать на поправочный коэффициент k_m, определяемый по графику (рис. 3) в зависимости от толщины плиты верхнего слоя. Расчетные изгибающие моменты в плитах верхнего и нижнего слоев двухслойного покрытия $m_{d,sup(inf)}$ на единицу ширины сечения плиты определяются по формулам:

– в плитах верхнего слоя с совмещенными швами:

$$m_{d,\sup} = \frac{k' m_{c,\max}}{1 + \frac{B_{\inf}}{B_{\sup}}} \qquad (20)$$

– в плитах нижнего слоя с совмещенными швами:

$$m_{d,\ inf} = k' m_{c,\ max} - m_{d,\ sup} \qquad (21)$$

– в плитах верхнего слоя с несовмещенными швами:

$$m_{d,\sup} = \frac{k_1 m_{c,\max}}{1 + \frac{B_{\inf}}{B_{\sup}}} \qquad (22)$$

– в плитах нижнего слоя с несовмещенными швами:

$$m_{d,\inf} = \frac{m_{c,\max}}{1 + \frac{B_{\sup}}{B_{\inf}}} \qquad (23)$$

где:

$m_{c,max}$ – максимальный изгибающий момент при центральном загружении однослойной плиты с приведенной жесткостью $B_{inf} + B_{sup}$;

B_{sup}, B_{inf} – жесткость плит соответственно верхнего и нижнего слоев;

k' – поправочный коэффициент, принимаемый равным:

1,5 – при отсутствии стыковых соединений в верхнем и нижнем слоях;

1,4 – при устройстве стыковых соединений только в нижнем слое;

1,3 – при устройстве стыковых соединений только в верхнем слое;

1,2 – при устройстве стыковых соединений в верхнем и нижнем слоях;

k1 – поправочный коэффициент, учитывающий концентрацию изгибающих моментов в верхнем слое двухслойного покрытия с несовмещенными швами над краями и углами плит нижнего слоя и принимаемый равным:

1,3 – при отсутствии стыковых соединений в верхнем и нижнем слоях;

1,2 – при устройстве стыковых соединений только в нижнем слое;

1,1 – при устройстве стыковых соединений только в верхнем слое;

1,05 – при устройстве стыковых соединений в верхнем и нижнем слоях или только в верхнем слое.

При усилении существующих полов при их реконструкции целесообразно руководствоваться формулами для расчета двухслойных плит с несовмещенными швами.

Автор:
Горб Александр Михайлович
ЗАО «СК Конкрит Инжиниринг».
Директор.
Советник PAE,
член международного
союза экспертов
по строительным
материалам, системам
и конструкциям RILEM,
Американского института
бетона ACI
и Британской ассоциации
бетона CS.

Список литературы:

1. Бейтмен Г., Эрдейи А.«Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены». Справочная математическая библиотека - М.: Физматгиз, 1966. - 296 с.
2. Ватсон Г. Теория бесселевых функций, т. 1,2 - М.: 1949.
3. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. - 320 с.
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. - 470 с.
5. Никишин В.С., Шапиро Г.С. Задачи теории упругости для многослойных сред. - М: Наука, 1973. - 131 с.
6. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. – М: Наука, 1977. - 311 с.
7. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. Перевод с английского, М.: Наука, 1979. - 832 с.
8. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. – 560 с.
9. Gaskill, Jack D., «Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics», John Wiley & Sons, New York, 1978. ISBN 0-471-29288-5
10. Polyanin, A. D. and Manzhirov, A. V., Handbook of Integral Equations, CRC Press, Boca Raton, 1998. ISBN 0-8493-2876-4